Wissen und Können	Aufgaben und Beispiele

1. Funktionen

Bezeichnungen:

D *Definitionsmenge*
$x \mapsto f(x)$ *Funktionsvorschrift*
f(x) *Funktionsterm*
y = f(x) *Funktionsgleichung*
y *Funktionswert* von x

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die zu jeder Zahl x einer Menge D eindeutig eine Zahl y festlegt.
D = Q
$x \mapsto x^2 - 1$
$f(x) = x^2 - 1$
$y = x^2 - 1$
$x=3 \Rightarrow y = f(3) = 8$

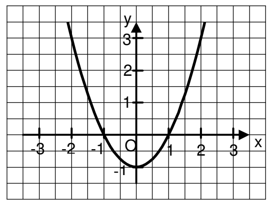
Aufgaben: Bestimme die Funktionswerte!
a) f(x) = 2x -1 f(0); f(-3); f(20); f(0,1)
b) g(x) = -x²+3 g(1); g(-2); g(0); g(15)

Der **Graph einer Funktion** kann mit Hilfe einer **Wertetabelle** gezeichnet werden!

$y = x^2 - 1$

Ergänze die Tabelle :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							



Hier ergibt sich als Graph eine Parabel.

W *Wertemenge* (Menge aller Funktionswerte von f)

W = [–1;+∞[(vgl. Graph)

Aufgabe:
c) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen für $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Schnittpunkte mit den Achsen:
Schnittpunkt mit der y–Achse (x=0)

$f: x \mapsto 2x - 3$
$x=0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S_y(0|-3)$

Schnittpunkte mit der x–Achse (y=0)
Ihre x–Koordinaten heißen **Nullstellen**

$y=0 \Rightarrow 0 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow S(\frac{3}{2}|0)$

Der Graph besitzt somit die Nullstelle $x_N = \frac{3}{2}$.

Schnittpunkte zweier Graphen

Aufgabe:
d) Bestimme den Schnittpunkt der zwei Funktionen: y = 3x - 2 und y = –x + 2

$f(x) = -0{,}5x + 2$, $g(x) = 2x - 3$
Ansatz: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -0{,}5x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow -2{,}5x = -5 \Leftrightarrow x = 2$
Es gibt einen Schnittpunkt:
$S: x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S(2|1)$

2. Lineare Funktionen y = m·x + t

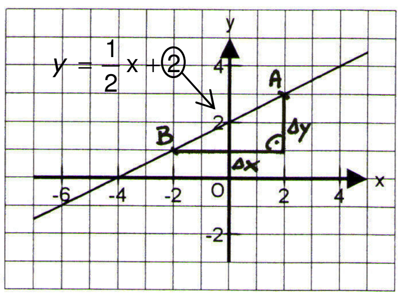
Aufstellen der Gleichung einer Geraden, die durch die Punkte A und B verläuft. (y=m·x+t)

Die Graphen linearer Funktionen sind immer Geraden

Erstelle die Gleichung der Geraden AB mit A(2|3) und B(–2|1):

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{1}{2}$, dann Punkt A oder B in y = m·x + t einsetzen. Hier B eingesetzt: $1 = \frac{1}{2}\cdot(-2) + t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow$ AB: $y = \frac{1}{2}x + 2$

Zeichnen von Geraden in ein Koordinatensystem mit Hilfe von **Steigung m** und **y–Achsenabschnitt t.**



Aufgabe:
a) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte C(3|-1) und D(-2|2).
b) Zeichne die Graphen der Funktionen mit $y = 3x - 2$ und $y = -x + 2$ mit Hilfe von m und t

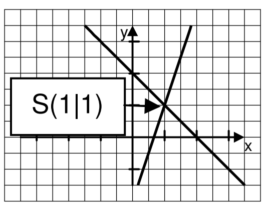
3.Gleichungssysteme mit zwei Variablen

a) grafisches Verfahren

Der Schnittpunkt S der Graphen beider Funktionen ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

(I) y = 3x – 2
(II) y = –x +2

L = {(1|1)}



b) Gleichsetzungsverfahren

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x-1 \\ y = -x+1 \end{array}\right\} 2x-1 = -x+1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{3} \Rightarrow y = \tfrac{1}{3} \quad L = \left\{\left(\tfrac{2}{3} \mid \tfrac{1}{3}\right)\right\}$$

c) Einsetzungsverfahren

(I) x – 2y = 1
(II) x + 2y = 5

(II) nach x aufgelöst, ergibt:
(II') x = 5 – 2y
in (I) (5 – 2y) – 2y = 1 ⇔ y = 1
in (II') x = 5 –2·1 =1 ⇔ x = 3
⇒ L={(3|1)}

Aufgabe:
Löse das Gleichungssystem
(I) x + 2y = 7
(II) 3y - x = 8
mit dem Einsetzungsverfahren

d) Additionsverfahren

(I) 3x – 2y = 34
(II) x + y = 128 |·2
(II')2x + 2y = 256
(I)+(II'): 5x = 290 ⇔ x = 58
⇒ y = 128 – 58 = 70 ⇒L={(58|70)}

Aufgabe:
Löse das Gleichungssystem
(I) 2x + 3y = 9
(II) -2x + 2y = -4
mit dem Additionsverfahren.

4. Gebrochen–rationale Funktionen

der Form $g(x) = \dfrac{\pm 1}{x-a} + b$

enthalten im Nenner die Variable x.

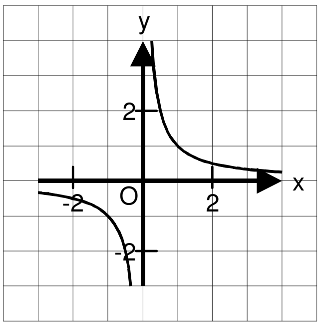
Nenner **N**ie **N**ull: D = Q \ {a} !

Senkrechte Asymptote bei x = a (Polstelle)

Waagrechte Asymptote bei y = b

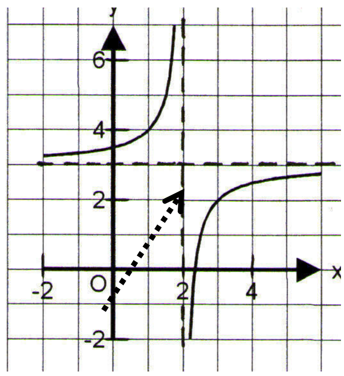
Die Graphen heißen **Hyperbeln**.
Den Graphen von G erhält man durch Verschieben und Spiegeln an der x–Achse des Graphen von f mit f(x) = 1/x.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ D = Q \ {0}



Aufgabe: Gesucht:
Graph von $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$

$g(x) = \dfrac{-1}{x-2} + 3$ D = Q \ {2}



5. Bruchterme und Bruchgleichungen

Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen:

Aufgabe: Vereinfache!
a) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{2-x}$ b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{0{,}5x^2}{x+1}$

Beachte: Erst Nenner Faktorisieren, dann die Definitionsmenge angeben!

1) D = Q \ {1}; D bleibt bei allen Umformungen unverändert:

$$\frac{x^2-x}{1-x} = \frac{-x\cdot(1-x)}{(1-x)} = -x$$

2) D =Q \ {–1;0}

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{x+1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{x}$$

Lösen von Bruchgleichungen:

Aufgabe: c)Bestimme Definitions- und Lösungsmenge: $\dfrac{1}{x-1} + 1 = \dfrac{1}{x^2-x}$

$$\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7)\cdot(x+7)} \qquad \underbrace{|\cdot(x-7)\cdot(x+7) \quad ; \quad D=Q \setminus \{-7;+7\}}_{\text{„Mit dem Hauptnenner multiplizieren“}}$$

(x+7) – 14 = 0 ⇔ x = 7 ∉ D ⇒ L={ }, es gibt keine Lösung

6. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$7^0 = 1$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $(-x)^0 = 1$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$

Rechengesetze für Potenzen
($a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$):

Potenzen mit gleicher Basis:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$6^{-3} \cdot 6^7 = 6^{-3+7} = 6^4$; $(-s)^{-2} \cdot (-s)^{-5} = (-s)^{-2+(-5)} = (-s)^{-7}$

$(-5)^3 : (-5)^{-2} = (-5)^{3-(-2)} = (-5)^5$; $\frac{b^2}{b^3} = b^{2-3} = b^{-1}$

$(2^{-4})^{-3} = 2^{-4 \cdot (-3)} = 2^{12}$; $(k^3)^{-2} = k^{3 \cdot (-2)} = k^{-6}$

Potenzen mit gleichem Exponenten:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$ bzw. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$5^7 \cdot 6^7 = (5 \cdot 6)^7 = 30^7$; $(-a)^{-5} \cdot b^{-5} = (-a \cdot b)^{-5}$

$8^9 : 4^9 = (8 : 4)^9 = 2^9$; $\frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$

$(2x)^3 = (2)^3 \cdot (x)^3 = 8 \cdot x^3$

Beachte außerdem:

$(-3)^4 = 3^4$ und $(-3)^{-4} = 3^{-4}$; $(-3)^5 = -3^5$ und $(-3)^{-5} = -3^{-5}$

$-3^4 = -1 \cdot 3^4 = -(3^4) \neq (-3)^4$

Gleitkommadarstellung einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$:
$z = a \cdot 10^n$ mit $a \in [1;10[$ und $n \in \mathbb{Z}$

$66200000 = 6{,}62 \cdot 10^7$; $0{,}000036 = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$

7. Strahlensatz:

Werden zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt Z von zwei Parallelen p_1 und p_2 (die Z nicht enthalten) geschnitten, so gilt:

1.) Je zwei Abschnitte auf g verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h.

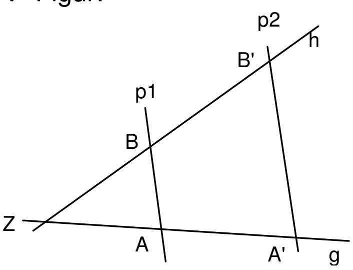
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

2.) Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Abschnitte auf g oder h.

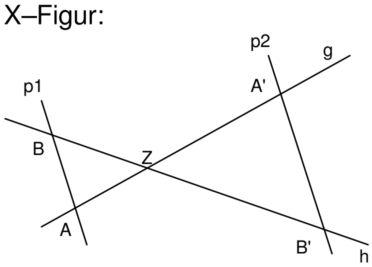
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

Dies gilt für beide Figuren!

V–Figur:

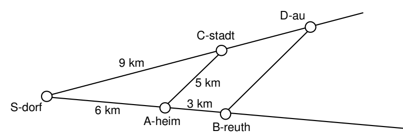


X–Figur:

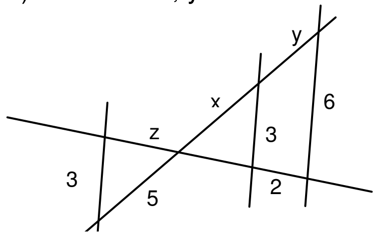


Aufgabe:

a) Berechne wie weit C-stadt von D-au und D-au von B-reuth entfernt sind!

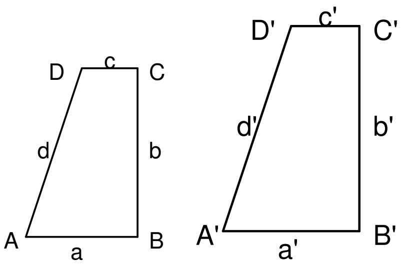


b) Berechne x, y und z!



Zueinander ähnliche Figuren stimmen in allen entsprechenden Winkeln und in allen Verhältnissen entsprechender Seitenlängen überein.

Ob zwei **Dreiecke** zueinander ähnlich sind, lässt sich mithilfe von **Ähnlichkeitssätzen** (WW –, S:S:S –, S:W:S –, S:s:W – Satz) feststellen.



Strecken:
$a' : a = b' : b = \ldots = k$;
k heißt Ähnlichkeitsfaktor.

Flächen:
$A'_{A'B'C'D'} : A_{ABCD} = k^2$

8. Zufall und Wahrscheinlichkeit

Ergebnis ω (Versuchsausgang).

Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum** Ω zusammen.

Teilmengen des Ergebnisraumes sind **Ereignisse**. Ein *Elementarereignis* besteht aus nur einem Ergebnis. *Sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis.*

Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich ist, heißen **Laplace–Experimente**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P(E)** für ein Ereignis E so berechnen:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ E}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega}$$

In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4, oder 5. Diese bilden den Ergebnisraum. Ω = {1, 2, 3, 4, 5}.

Ein Ereignis wäre z.B. E = {„Die Losnummer ist gerade“} = {2, 4}.
Es ist $E \subset \Omega$.
Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.

Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace–Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:

$$P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$$

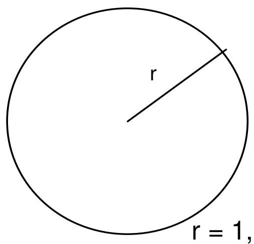
Aufgabe:

In der 8Gc sind 11 Mädchen und 14 Jungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junge zur Leistungskontrolle aufgerufen wird?

9. Der Umfang u und der Flächeninhalt A eines Kreises hängt von dessen Radius r ab:

$u = \pi \cdot 2r$ $\qquad A = \pi \cdot r^2$

π heißt Kreiszahl und hat ungefähr den Wert: π = 3,141592654... ≈ 3,14



r = 1,2 cm

$u = \pi \cdot 2 \cdot 1{,}2cm \approx 7{,}54cm$

$A = \pi \cdot (1{,}2cm)^2 \approx 4{,}52cm^2$

Aufgabe:

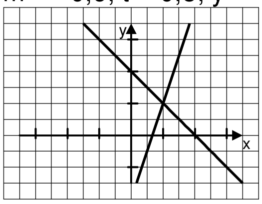
a) Der Umfang eines Kreises ist 7,85m. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

b) Der Flächeninhalt eines Kreise ist 12,57 cm². Berechne den Kreisdurchmesser!

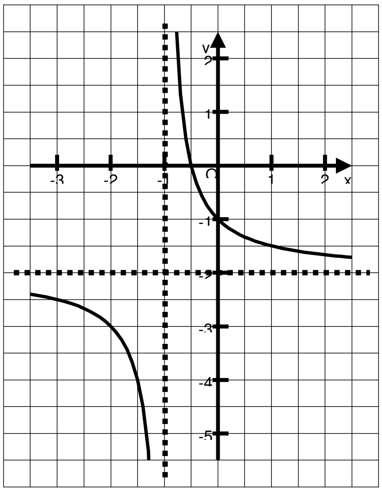
LÖSUNGEN:

1a) f(0) = –1; f(–3) = –7; f(20) = 39; f(0,1) = –8,8
1b) g(1) = 2 ; g(–2) = –1 ; g(0) = 3; g(15) = –222
1c) $S_y(0|1)$; N(1,5|0)
1d) S(1|1)

2a) m = –0,6; t = 0,8; y = –0,6x+0,8

2b) 

3b) y=3; x=1; L={(1|3)}
3c) y=1; x=3; L={(3|1)}

4) 

5a) $\frac{2}{x-2}$ b) $\frac{x}{2(x+1)}$

5c) D = Q \ {0;1}; Hauptnenner: $x^2 - x = x \cdot (x-1)$
Multiplikation mit HN ergibt: $x^2=1 \Rightarrow L = \{-1\}$

7a) $\frac{3km}{6km} = \frac{\overline{CD}}{9km} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4{,}5km$;
$\frac{\overline{BD}}{5km} = \frac{6km+3km}{6km} \Leftrightarrow \overline{BD} = 7{,}5km$

7b) $\frac{x}{5} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x = 5$; $\frac{y+5}{5} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 5$;
$\frac{5}{5} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = 2$

9a) r = 1,25 m; A = 4,90 m
9b) $r^2 = 4\ cm^2$; r = 2cm; d = 4cm