BBS	**Grundwissen Mathematik**	**9. Jahrgangsstufe**

Wissen und Können / Aufgaben und Beispiele

1. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$\sqrt{a}$ (lies: Wurzel von a) ist diejenige nicht negative reelle Zahl, deren Quadrat a ergibt. Dabei muss der Radikand a ≥ 0 sein. $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$

Beachte: $\boxed{\sqrt{b^2} = |b|}$

Die ***n*-te Wurzel** ($n \in N$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$; $\sqrt[n]{a} = x$;

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{(-6)^2} = 6$,

$\sqrt{2x-4}$, D = [2;∞ [

$\sqrt{4-2x}$, D =]-∞;2]

$$\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{falls } x \geq 1{,}5 \\ -(2x-3), & \text{falls } x < 1{,}5 \end{cases}$$

$x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5,$

denn $5^3 = 125$

> **Aufgabe:**
> 1a) Bestimme die Lösungsmengen :
> > $x^2 + 25 = 169$
> > $x - 0{,}5 = \sqrt{25}$
>
> 1b) Radiziere teilweise:
> $\sqrt{8r^4s^3} \cdot \sqrt{12r^3s^3} : \sqrt{4rs^2}$
>
> 1c) Mache den Nenner rational:
> $\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} = ?$ $\quad \frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} = ?$

Rechenregeln für **Wurzeln:**

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\qquad a \in R_0^+; b \in R^+$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\qquad m, n \in Z, m \neq 0$

Achtung : gilt nicht bei Summen! $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$

Teilweises Radizieren

$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ $\qquad \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Rationalmachen des Nenners

$$\frac{a}{c-\sqrt{x}} = \frac{a\cdot\left(c+\sqrt{x}\right)}{\left(c-\sqrt{x}\right)\cdot\left(c+\sqrt{x}\right)} = \frac{a\cdot\left(c+\sqrt{x}\right)}{c^2-x}; \quad a, c \in \mathbb{R},$$

Rechnen mit Potenzen: a,b $\in \mathbb{R}$, b≠0, **m,n∈Q**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $a^0 = 1$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $\qquad a^m : b^m = (a : b)^m$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\qquad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

$3^{0,2} \cdot 3^4 = 3^{0,2+4} = 3^{4,2}$

$5^3 : 5^{-2} = 5^{3-(-2)} = 5^5$

$2^{-4} \cdot 3^{-4} = (2 \cdot 3)^{-4} = 6^{-4}$

$1{,}5^2 : 3^2 = (1{,}5 : 3)^2 = 0{,}5^2$

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{5}{4}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{3}$

$(3^{-2})^4 = 3^{-2 \cdot 4} = 3^{-8} = \frac{1}{3^8}$

> **Aufgabe:** 1d)
> Vereinfache mit Hilfe der Potenzgesetze:
> $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = ?$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{3}} : \sqrt[4]{3} = ?$
>
> $\left(3x^3\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot (27x)^{-\frac{1}{4}} = ?$

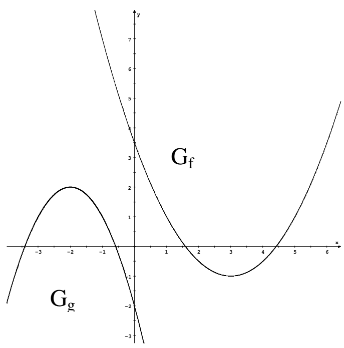
2. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen auf die Form **ax²+bx+c=0** $(a, b, c \in R, a \neq 0)$ bringen, dann mit der Lösungsformel nach x auflösen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit der *Diskriminanten* $D = b^2 - 4ac$.

Für die Anzahl der Lösungen gilt:
D<0 keine/ D>0 zwei/ D=0 genau eine.
Die Lösungen sind die *Nullstellen* der quadratischen Funktion $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-0{,}5)\cdot(-2{,}5)}}{2\cdot(-0{,}5)} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

> **Aufgabe:**
>
> 2a) Löse die Gleichung:
> $2 \cdot x + \sqrt{3} \cdot (1 - x^2) = 0$
>
> 2b) Gib in Scheitelform an:
> $f(x) = 0{,}5x^2 - x + 0{,}75$
>
> 2c) Bestimme die Funktionsgleichungen beider Graphen!



Quadratische Funktionen

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

mit quadratischer Ergänzung auf **Scheitelform y = a (x – x_s)² + y_s** bringen.

Scheitel **S(x_s / y_s)**

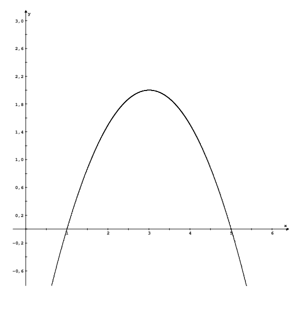
a bestimmt die Öffnung der **Parabel**:
- a > 0 : Parabel nach oben geöffnet
- a < 0 : Parabel nach unten geöffnet
- |a| = 1 : Normalparabel
- |a| > 1 : engere Form
- |a| < 1 : weitere Form

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}[x^2 - 6x] - \frac{5}{2} =$

$= -\frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2\right] - \frac{5}{2} =$

$= -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 9\right] - \frac{5}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$; S(3/2)



Binomische Formeln:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$\frac{9}{16}a^4b^2 - 2\frac{1}{4}a^2bc^3 + \frac{9}{4}c^6 =$

$= (\frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{2}c^3)^2$

Aufgabe:
2d) $(2x + 6)^2 = ?$
2e) $\left(\sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}\right)$

3. Die **Wurzelfunktion** $f: x \mapsto \sqrt{x}$ mit $D = R_0^+;\quad W = R^+$ ist die *Umkehrfunktion* der quadrat. Funktion im I.Quadranten.

Den Graphen erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

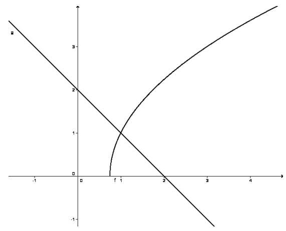
Aufgabe: Finde die Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = \sqrt{4x-3}$ und $g(x) = 2 - x$.

$\sqrt{4x-3} = 2 - x;\ \mathrm{D} =]\ \frac{3}{4}\ ; \infty\ ]$

quadrieren: $4x - 3 = 4 - 4x + x^2;$

mögliche Werte für x: 7 und 1.

Probe: Nur Schnittpunkt S(1/1)

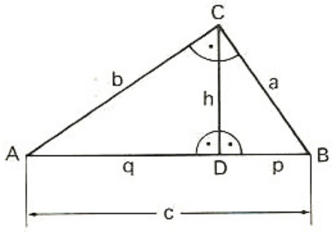


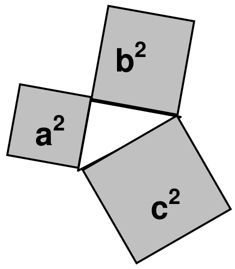
4. **Satzgruppe des Pythagoras:**
Im <u>rechtwinkligen</u> Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten. $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$
Gilt in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig.

Kathetensätze des Euklid

$a^2 = pc,\ b^2 = qc$

Höhensatz des Euklid: $h^2 = pq$





Aufgabe: Gegeben: p=3cm, a=4cm.
Berechne b, c, und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC.

Lösung: $h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{7}cm;\ q = \frac{h^2}{p} = \frac{7}{3}cm;\ c = p + q = \frac{16}{3}cm;$

$b = \sqrt{qc} = \frac{4}{3}\sqrt{7}cm,\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h = \frac{8}{3}\sqrt{7}cm^2$

5. **Trigonometrische Beziehungen** im rechtwinkligen Dreieck:

$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ \ von\ \ \alpha}{Hypotenuse}$

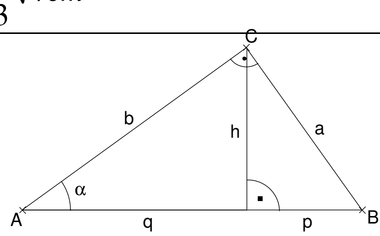
$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ \ von\ \ \alpha}{Hypotenuse}$

$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ \ von\ \ \alpha}{Ankathete\ \ von\ \ \alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Gegeben: b = 4,5m; $\alpha = 43{,}5^0$
gesucht: q und h

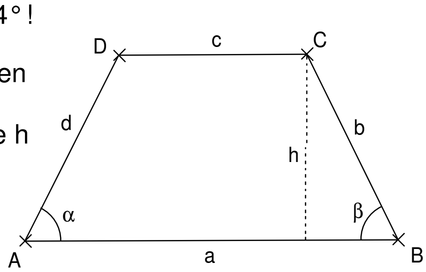
$\cos\alpha = \frac{q}{b} \Rightarrow q = b\cdot\cos\alpha = 3{,}26m$

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\cdot\sin\alpha = 3{,}10m$



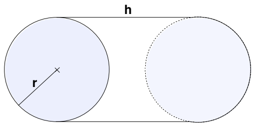
Aufgabe:
5a) Berechne die Länge der Diagonalen einer Raute ABCD mit a = 4,3 cm und α = 74° !

5b) In einem symmetrischen Trapez mit c < a gilt h : b = 2 : 3 für die Höhe h und die Seite b. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel und den Flächeninhalt A des Trapezes, wenn gilt: h = 5,0 cm; c = 4,5 cm !



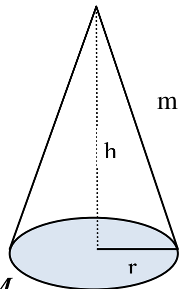
6. **Raumgeometrie:** Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Körpern

Zylinder: $V_Z = r^2\pi h$, $O_Z = 2r^2\pi + 2r\pi h$;



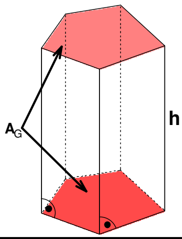
Kegel: $V_{Ke} = \frac{1}{3}r^2\pi h$, $O_{Ke} = r^2\pi + r\pi m$

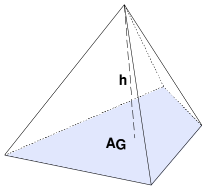
(Mantellinie $m = \sqrt{r^2+h^2}$)



Prisma: $V_{Pri} = A_G \cdot h$

$O_{Pri} = 2A_G + M$





Pyramide: $V_{Pyr} = \frac{1}{3}A_G h$, $O_{Pyr} = A_G + M_{Pyr}$

Aufgabe:

6a) Ein kegelförmiges Sektglas hat den Randdurchmesser d = 2r und die Höhe h. Das Glas wird bis zur halben Höhe gefüllt. Wie viel Prozent des Gesamtvolumens sind das?

6b) Wie viel cm² Blech benötigt man zur Herstellung einer Konservendose mit Durchmesser d = 8,1 cm und Volumen V = 0,5 l, wenn für Falze und Verschnitt 15 % Blech hinzuzurechnen sind ?

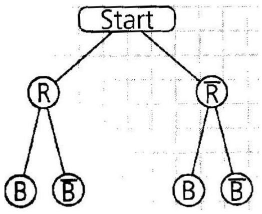
Mehrstufige (zusammengesetzte) **Zufallsexperimente**: mehrere Teilexperimente werden nacheinander ausgeführt.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, beträgt immer 1.

1.Pfadregel: Die WS eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu dem Ergebnis führt.

2. Pfadregel : Die WS eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis gehören.

Aufgabe: Der Rauschgifthund Rex soll immer bellen, wenn er Rauschgift findet. Ca. 20% aller Ankommenden haben Rauschgift und Rex bellt mit 90%-er Sicherheit richtig. Leider bellt er in 30% aller Fälle zu Unrecht.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit bellt Rex?

$P(B) =$

$0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 =$

$42\ \%$

Gib die WS dafür an, dass eine Person unerkannt Rauschgift schmuggeln kann.

$P(R,\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 2\%$)

Aufgabe: 7) In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit der Aufschrift „1“ und 2 Kugeln mit der Aufschrift „2“. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Von Interesse ist das Ereignis A: „Die Summe der Zahlen auf den Kugeln beträgt 3.“. Gib Ω und A in Mengenschreibweise an und bestimme P (A) mit Hilfe eines Baumdiagramms !

LÖSUNGEN:

1a) $x = \pm 12$ / $x = 5{,}5$ 1b) $2\sqrt{6r^3s^2}$ 1c) $1{,}4\cdot\sqrt{5} = \frac{7}{5}\sqrt{5}$ 1d) $\sqrt{3^{-3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ / $3^{-\frac{7}{12}}$ / $\frac{1}{3x}$

2a) $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}}{2\cdot(-\sqrt{3})} = \frac{-2\pm 4}{-2\sqrt{3}} \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}; x_2 = \sqrt{3}$ 2b) $f(x) = 0{,}5(x-1)^2 + 0.75$

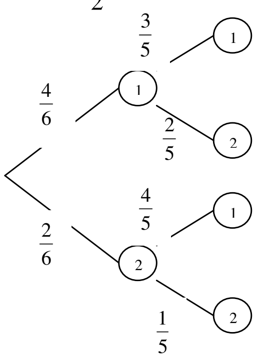
2c) $f(x)=0{,}5(x-3)^2 -1$ $g(x)= -(x+2)^2 +2$ 2d) $4x^2+24x+36$ 2e) a - b

5a) $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{f}{2}}{a} \Rightarrow f = 2a\cos(\frac{\alpha}{2}) = 6{,}87cm;$ $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{e}{2}}{a} \Rightarrow e = 2a\sin(\frac{\alpha}{2}) = 5{,}18cm;$

5b) $b = \frac{2}{3}h = 7{,}5cm = d;$ $x = \sqrt{b^2-h^2};$ $a = c + 2x = 4{,}5 + 5\sqrt{5};$ $\sin\beta = \frac{h}{b} \Rightarrow \beta = \alpha = 41{,}8°; \gamma = \delta = 138{,}2°;$ $A = \frac{a+c}{2}\cdot h = 50{,}5cm^2$

6a) $V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{s}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8}V = 12{,}5\% \cdot V$

6b) $O = 2\cdot G + M = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 350cm^2$ *Verbrauch somit* $1{,}15\cdot O = 402{,}5cm^2$



7) $\Omega = \{(1/1);(1/2);(2/1);(2/2)\}$ $A = \{(1/2);(2/1)\}$ $P(A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{12}$