Teil I.

Analysis

1. Grundbegriffe, Definitionen

1.1. Griechisches Alphabet

α	Alpha	β	Beta	γ	Gamma	δ	Delta	ε	Epsilon	ζ	Zeta
η	Eta	ϑ	Theta	ι	Iota	κ	Kappa	λ	Lambda	μ	My
ν	Ny	ξ	Xi	o	Omikron	π	Pi	ρ	Rho	σ	Sigma
τ	Tau	υ	Ypsilon	φ	Phi	χ	Chi	ψ	Psi	ω	Omega

1.2. Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	(1; 2; ...)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	(-1; 0; 1; ...)
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	(-1; -$\frac{1}{2}$; 0; $\frac{2}{3}$; 2,5; ...)
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	(-1; -$\frac{1}{2}$; 0; $\sqrt{2}$; π; e; ...)

$\mathbb{D}$	$\rightarrow$ Definitionsmenge	„x-Werte“
$\mathbb{W}$	$\rightarrow$ Wertebereich	„y-Werte“

Definitionsmenge ($\mathbb{D}$)
Die Zahlenmenge bzw. Teilmenge die für „x“ eingesetzt werden darf. (**Achtung:** Nennernullstellen ausschließen, siehe 3.4)

Wertemenge ($\mathbb{W}$)
Die Zahlenmenge bzw. Teilmenge die man beim Einsetzen der Definitionsmenge in $f(x)$ für „y“ erhält.

1.3. Intervallschreibweisen

$]-1;2[$	-1 $<x<$ 2 , Intervall ohne -1 und 2
$[-1;2]$	-1 $\leq x \leq$ 2 , Intervall mit -1 und 2
$]-\infty;+\infty[$	$\pm\infty$ müssen immer aus dem Intervall ausgeschlossen werden

$x \in\ ]-\infty;0]$	$x \leq 0$, x ist Element von -∞ bis einschließlich 0
$x \notin [0;+\infty[$	$x \geq 0$, x ist kein Element von einschließlich 0 bis +∞

$x \in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$	oder	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
x ist Element von -∞ bis 0 oder von 0 bis +∞	oder	x ist Element von $\mathbb{R}$ ohne Null

2. Rechenregeln

2.1. Potenz

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & a^x \cdot a^y & = & a^{x+y} \\
2) & a^x : a^y & = & a^{x-y} \\
3) & (a^x)^y & = & a^{x\cdot y} \\
4) & a^x \cdot b^x & = & (a \cdot b)^x \\
5) & a^{-x} & = & \frac{1}{a^x}
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
\mathbf{a^1} & = & \mathbf{a} \\
\mathbf{a^0} & = & \mathbf{1}
\end{array}}
$$

2.2. Wurzel

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & = & \sqrt{a \cdot b} \\
2) & \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} & = & a \\
3) & \sqrt{a} : \sqrt{b} & = & \sqrt{a : b} \\
4) & \sqrt{a} : \sqrt{a} & = & 1 \\
5) & \sqrt[y]{a^x} & = & a^{\frac{x}{y}} \\
6) & \sqrt{a} + \sqrt{b} & \neq & \sqrt{a + b}
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
\mathbf{a < 0} & \rightarrow & \sqrt{\mathbf{a}} = \lightning \\
\sqrt{\mathbf{1}} & = & \mathbf{1}
\end{array}}
$$

2.3. Logarithmus

$$\log_a b = x \qquad \Leftrightarrow \qquad a^x = b$$

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & \log_a a^x & = & x \\
2) & \log_a u \cdot v & = & \log_a u + \log_a v \\
3) & \log_a u : v & = & \log_a u - \log_a v \\
4) & \log_a u^x & = & x \cdot \log_a u
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
\log_{\mathbf{a}} \mathbf{1} & = & \mathbf{0} \\
\log_{\mathbf{a}} \mathbf{0} & = & \lightning
\end{array}}
$$

2.4. Limes

Mit dem Limes können Grenzwerte in Richtung $\pm\infty$ sowie gegen eine bestimmete Zahl gebildet werden. Soll der Limes gegen eine bestimmte Zahl x_0 gebildet werden, so wird „gedanklich“ ein Wert größer (rechts) und kleiner (links) davon eingesetzt. Somit lässt sich das Verhalten einer Funktion an wichtigen Stellen, wie z.B. von $\frac{1}{x}$ bei $x = 0$, beschreiben, um Auskunft darüber zu erhalten, um welche Art von Polstelle es sich handelt. In diesem Falle mit einem Vorzeichenwechsel.

Wäre die Funktion $f(x) = \frac{x}{x}$ geben so würde die Untersuchung der Funktion interessante Ergebnisse liefern, denn die Funktion drückt eine Parallele zur x-Achse aus, die an der Stelle $x = 0$ eine Definitionslücke hat, aber keinerlei Polstelle, da es sich um eine stetig behebbare Definitionlücke handelt. Auch in Richtung $\pm\infty$ würde sich am y-Wert von 1 nichts ändern.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} f(x) = 1$$

Beispiele:

1) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\underbrace{x}_{\to\pm\infty}} = \pm 0$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x^2+1}^{\to+\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to-\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to+0}\right)}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to-0}} = -\infty$$

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{1} = -1$$

2.5. Polynomdivision

Mit der Polynomdivision kann ein Polynom vereinfacht werden, um etwaige Nullstellen einfacher zu finden. Es ist aber wichtig mindestens eine Nullstelle zu kennen, damit die Polynomdivision überhaupt durchgeführt werden kann. **Wichtig: Auf Vorzeichen achten!** Falls man durch einen beliebigen Term teilt, bleibt ein Rest, siehe Beispiel.

Beispiel: Geg: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ und ein ausgedachter Teiler $(x-1)$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 7\big) : \big(x-1\big) = x^2 - x - 6 + \dfrac{1}{x-1} \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\;\; -x^2 - 5x \\
\qquad\;\; \underline{\;\;x^2 \;\; - x} \\
\qquad\qquad\quad -6x + 7 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\;6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 1
\end{array}
$$

Als erstes wird der Divisor $(x-1)$ mit dem Dividenden $(x^3 - 2x^2 - 5x + 7)$ verglichen. Hierbei ist ersteinmal nur die erste Stelle des Divisors x und des Dividenden x^3 entscheident. Als nächstes muss überlegt werden mit was x multipliziert werden muss um x^3 zu erhalten. Dazu kann eine Gleichung aufgestellt werden, $x \cdot a = x^3$, diese wird nach a umgestellt, $a = \frac{x^3}{x} = x^2$.

Dieses Ergebnis wird hinter das = geschrieben. Danach wird der Divisor mit dem Ergebnis (x^2) durchmultipliziert und das Produkt in der unter dem Dividenden folgenden Zeile geschrieben. Da aber dieser Wert von dem Dividenden subtrahiert werden muss, muss noch ein Minuszeichen sowie Klammern gesetzt werden, das sollte dann in etwa so $-(x^3 - x^2)$ hingeschrieben werden. Nach dem Subtrahieren wird das Ergebnis in die nächste Zeile unter dem Dividenden geschrieben.

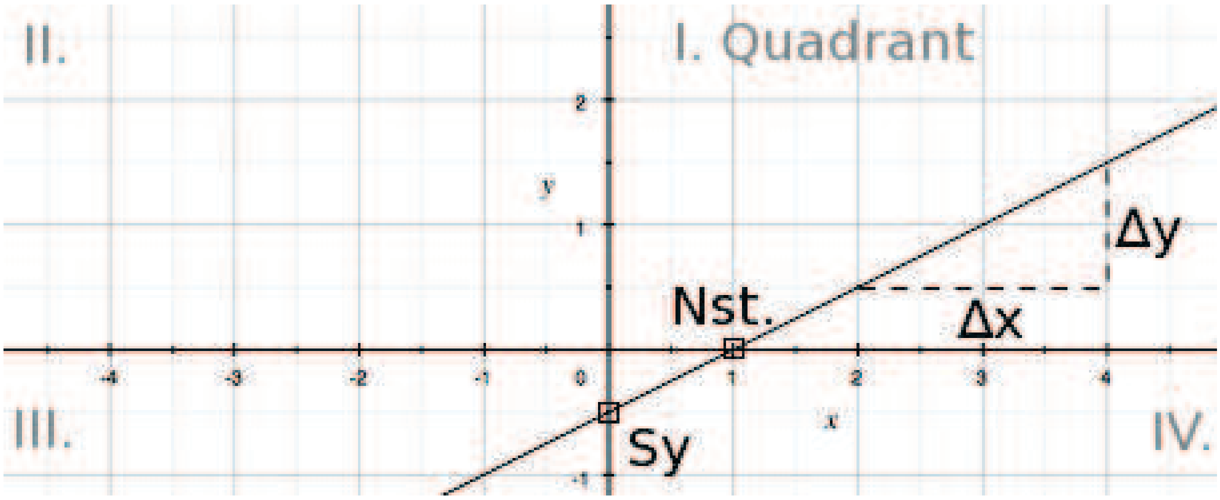
Jetzt wird wieder verglichen. Diesmal aber das Ergebnis der Subtraktion, also $-x^2 - 5x$, mit dem Dividenden. Diese Schritte werden so lange wiederholt bis keine Variable, in diesem Falle x, mehr vorhanden ist. Der Rest wird dann als Bruch zum Ergebnis dazugeschrieben, $+\frac{1}{x-1}$.

3. Funktionen

3.1. Lineare Funktion + Winkel an Geraden

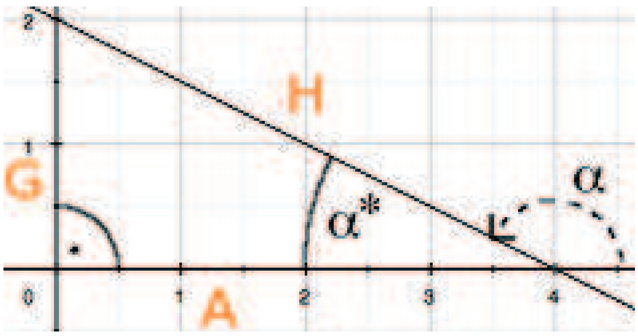
$$\boxed{f(x) = m \cdot x + t}$$

„m“ $\Rightarrow$ Steigung der Gerade, $\mathbf{m} = \mathbf{f'(x)}$ oder $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{\Delta y}}{\mathbf{\Delta x}}$
„t“ $\Rightarrow$ y-Achsenabschnitt „$\mathbf{Sy(0|t)}$“ , Verschiebung der Geraden in y-Richtung



Winkel an Geraden

Der Schnittwinkel zwischen x-Achse und einer Geraden, bzw. zwischen zwei Geraden ist immer **kleiner** als **90°! Aber:** Der Neigungwinkel einer Geraden zur $x-$Achse ist $\boldsymbol{\alpha}$, gegen den Uhrzeigersinn gemessen! Deswegen ist eine Umformung von $\boldsymbol{\alpha^*}$ nötig, wenn $m < 0$ ist!

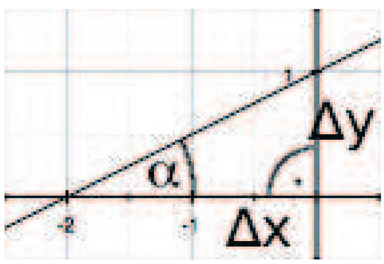


$\tan\,\alpha^* = \frac{G}{A} = \frac{y}{x}$

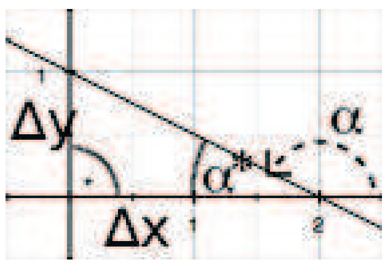
$\Rightarrow$ $\boxed{\tan\,\alpha^* = -m}$

$\Rightarrow$ $\alpha = 180° - \alpha^*$

„$\mathbf{m > 0}$“
$\tan\,\alpha = m$



„$\mathbf{m < 0}$“
$\tan\,\alpha^* = -m$



3.2. Quadratische Funktion + Sekanten, Tangenten, Passanten

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Scheitelpunktsform: $$\boxed{f(x) = a(x - x_s)^2 + d}$$

Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_s|d)$

„Steigung“ $\Rightarrow$ $f'(x) = 2ax + b$

„a“ $\Rightarrow$ $a > 0$, (+) , nach oben geöffnet, geht von $+\infty$ nach $+\infty$
$a < 0$, (-) , nach unten geöffnet, geht von -∞ nach -∞

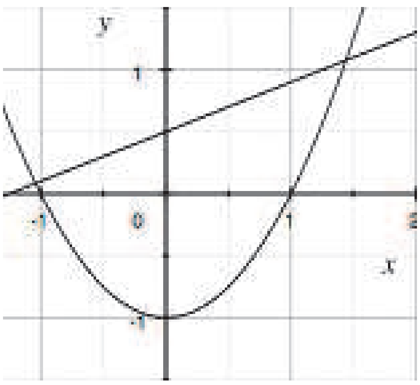
$a = 1$, Normalparabel
$a > 1$ oder $a < -1$, Streckung in y-Richtung, Parabel ist **enger**
$0 < a < 1$ oder $-1 < a < 0$, Stauchung in y-Richtung, Parabel ist **weiter**

„c“ $\Rightarrow$ y-Achsenabschnitt

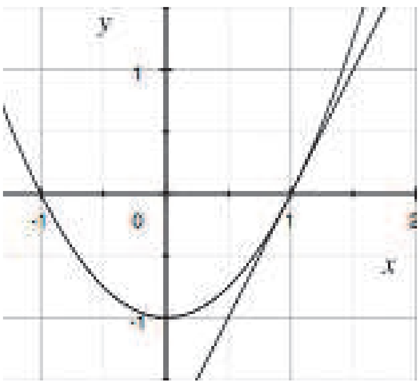
Nullstellen (max. 2)

$f(x) = 0$ $\Rightarrow$ Mitternachtsformel , $x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\Rightarrow$ Diskriminante , $D = b^2 - 4ac$
$D > 0 \Rightarrow$ 2 Nst.
$D = 0 \Rightarrow$ 1 Nst.
$D < 0 \Rightarrow$ keine Nst.

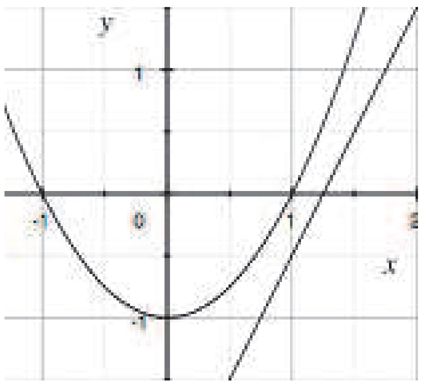
Sekanten, Tangenten, Passanten (Geraden)



2 Schnittpunkte
$D > 0$
$\Rightarrow$ Sekante



1 Schnittpunkt
$D = 0$
$\Rightarrow$ Tangente



kein Schnittpunkt
$D < 0$
$\Rightarrow$ Passante

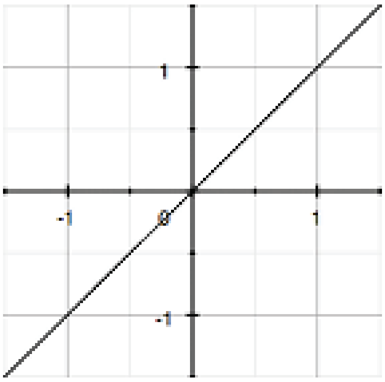
3.3. Ganzrationale Funktion

gerade Funktionen
höchste Potenz , $(x^2; x^4; x^6; \ldots)$
$\rightarrow$ grober Verlauf wie bei einer Parabel

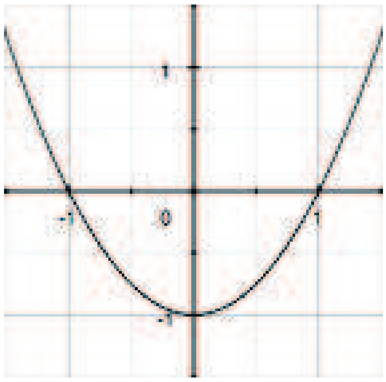
ungerade Funktionen
höchste Potenz , $(x^1; x^3; x^5; \ldots)$
$\rightarrow$ grober Verlauf wie bei einer linearen Funktion

> Die höchste Ptenz gibt zugleich den Grad und die max. möglichen Nullstellen einer Funktion an. (z.B. $f(x) = \underline{x^5} + x^3 + 1 \Rightarrow$ 5. Grad, max. 5 Nst.)

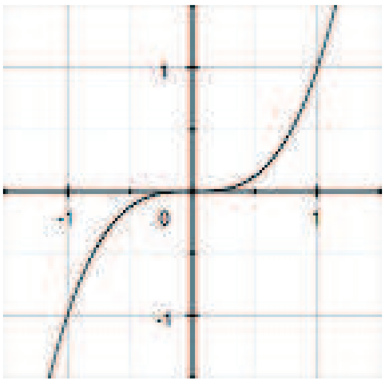
Beispiele:



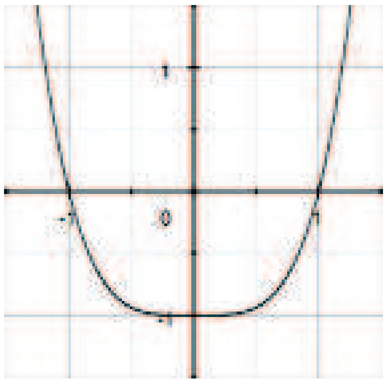
$f(x) = x$



$f(x) = x^2 - 1$



$f(x) = x^3$



$f(x) = x^4 - 1$

3.4. Gebrochenrationale Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{Z(x)}{N(x)}}$$

$Z(x) =$ Zählerfunktion , $N(x) =$ Nennerfunktion

„Zähler - Nullstellen“ $Z(x) = 0$	$\Rightarrow$	Schnittpunkte oder Berührungspunkte mit der x-Achse
„Nenner - Nullstellen“ $N(x) = 0$	$\Rightarrow$	muss aus $\mathbb{D}$ ausgeschlossen werden Definitionslücke <u>mit</u> oder <u>ohne</u> Vorzeichenwechsel (Polstelle) evtl. stetig behebbare Definitionslücke, wenn Nullstelle(n) von Zähler und Nenner gleich sind

Asymptoten

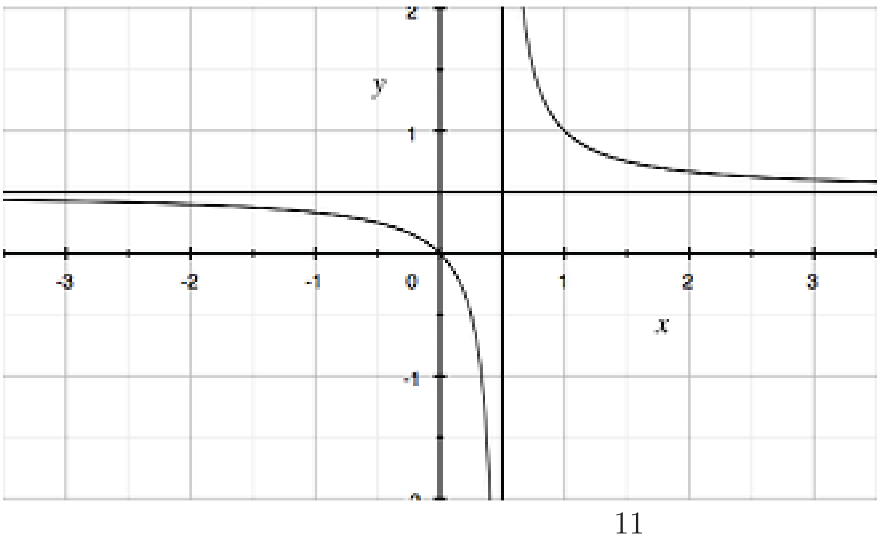
Die Geraden, an die sich der Graph annähert, werden Asymptoten genannt.

„senkrecht“	$\Rightarrow$	bei Definitionslücken, auch Unendlichkeitsstellen, wenn $N(x_0) = 0$ und $Z(x_0) \neq 0$
„waagrecht“	$\Rightarrow$	Zählergrad $<$ Nennergrad $\rightarrow$ bei $y = 0$ (x-Achse) Zählergrad $=$ Nennergrad $\rightarrow$ bei $y = ?$ $\rightarrow$? = „Koeffizienten-Bruch der höchsten Potenz“ $\rightarrow$ Limes (siehe 2.4)
„schräg“	$\Rightarrow$	Zählergrad „um eins“ $>$ Nennergrad $\rightarrow$ Polynomdivision (siehe 2.5)

Steigung bzw. Ableitung

Siehe Abschnitt Ableitungsregeln $\rightarrow$ Quotientenregel, 4.3.1

Beispiel:



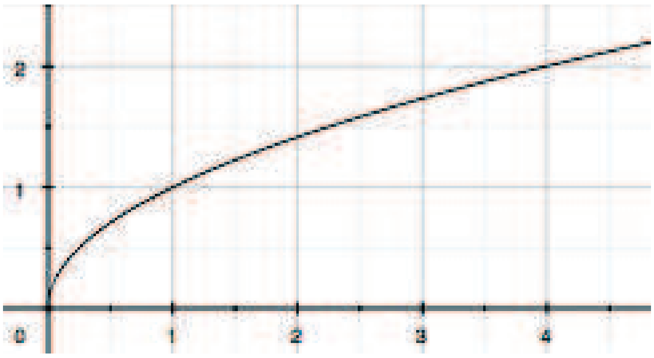
- Definitionslücke bei 0,5
- Nullstelle bei $x_0 = 0$
- senkrechte Asymptote bei $\rightarrow x = 0{,}5$
- waagrechte Asymptote bei $\rightarrow y = 0{,}5$

3.5. Wichtige Funktionen

3.5.1. Wurzelfunktion

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}}$$

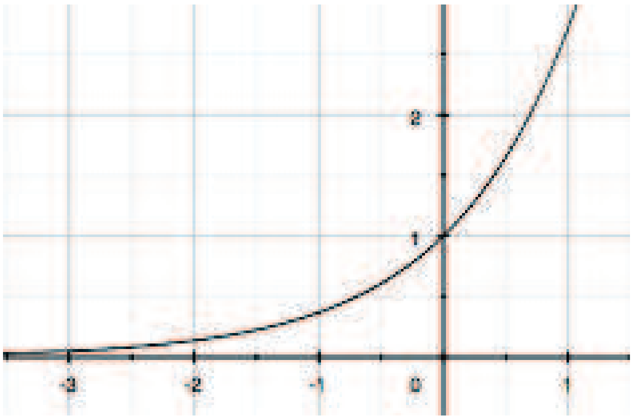
$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



3.5.2. e-Funktion

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

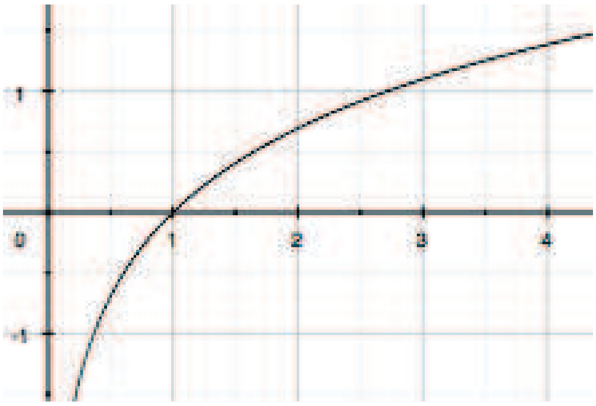
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$



3.5.3. ln-Funktion

$$\boxed{f(x) = \ln(x)}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$



4. Kurvendiskussion

4.1. Schnittpunkte mit den Achsen

x-Achse	$\Rightarrow$	$f(x) = 0$ also $y = 0$		„Nullstellen“ $\Rightarrow x_1, x_2 \dots$; Punkte $N_1(x_1\|0), N_2(x_2\|0) \dots$
y-Achse	$\Rightarrow$	$f(0) = y$ also $x = 0$		„y-Achsenabschnitt“ $\Rightarrow$ Punkt $S_y(0\|f(0))$

Es gibt auch Nullstellen, bei denen der Graph die x-Achse nicht schneidet, sondern nur berührt; diese heißen Berührungspunkte und treten z.B. bei einer Parabel ($f(x) = x^2$) auf, wenn der Scheitelpunkt gleichzeitig eine Nullstelle ist (doppelte Nullstelle).

4.2. Symmentrie

Achsensymmetrie	$\Rightarrow$	$f(x) = f(-x)$ Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse
Punktsymmetrie	$\Rightarrow$	$f(-x) = -f(x)$ oder $-f(-x) = f(x)$ Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung

4.3. Steigung und Ableitung

Tangente

Unter einer Tangente versteht man eine Gerade, die den Graphen in einem bestimmten Punkt, $P(x_0|f(x_0))$ berührt. Die Steigung m an diesem Punkt kann über die Differenzialrechnung ermittelt werden. Zum Schluss muss nur noch der Punkt eingesetzt werden, um das t zu bestimmen.

$$m_T = f'(x_0)$$

Normale

Unter einer Normalen versteht man eine Gerade, die senkrecht zur Tangente durch den gleichen Punkt $P(x_0|f(x_0))$ geht. Die Steigung ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung. Zum Schluss muss wieder der Punkt eingesetzt werden, um das t zu bestimmen.

$$m_N = -\tfrac{1}{m_T} = -\tfrac{1}{f'(x_0)} \text{ mit } f'(x) \neq 0$$

4.3.1. Ableitungsregeln

Summenregel und Faktorregel

Jeder Summand wird für sich selbst abgeleitet, der Faktor „a“ bleibt stehen! Konstanten fallen weg, Summanden ohne Variable „x“!

$$\boxed{f(x) = a \cdot x^b \Rightarrow f'(x) = ab \cdot x^{b-1}}$$

Produktregel

Jedes Produkt wird für sich abgeleitet. Meist wird dazu nur die Summen und Faktorregel benötigt. **Achtung:** Manchmal wird auch die Kettenregel gebraucht!

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Quotientenregel

Bei der Quotientenregel sollte der Nenner **immer** als Potenz stehen gelassen werden, der Zähler wird ausmultipliziert und zusammengefasst. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{Z(x)}{N(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}} \quad \text{oder} \quad \boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{ZaN} - \mathrm{NaZ}}{\mathrm{N}^2}}$$

Merksatz: <u>Z</u>ähler<u>a</u>bleitung mal <u>N</u>enner minus <u>N</u>enner<u>a</u>bleitung mal <u>Z</u>ähler durch <u>N</u>enner im Quadrat!

Kettenregel

Bei der Kettenregel ist zu beachten, dass es eine innere und äußere Funktion gibt, d.h. die innere Funktion wird von der äußeren „umschlossen“. Deswegen muss die innere Funktion als erstes abgeleitet werden, da sie die Variable für die äußere Funktion liefert.

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

4.3.2. Wichtige Ableitungen

$\sin x$	$\Rightarrow$	$\cos x$	$\cos x$	$\Rightarrow$	$-\sin x$
e^x	$\Rightarrow$	e^x	$\ln x$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{x}$
$a \cdot e^{bx^c}$	$\Rightarrow$	$a \cdot e^{bx^c} \cdot bc \cdot x^{c-1}$	$a \cdot \ln bx^c$	$\Rightarrow$	$a \cdot \frac{1}{bx^c} \cdot bc \cdot x^{c-1}$

4.4. Monotonie und Extrema

Monotonie

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall	$\Rightarrow$	Graph von $f(x)$, ist in diesem Intervall streng monoton steigend (sms)
Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall	$\Rightarrow$	Graph von $f(x)$, ist in diesem Intervall streng monoton fallend (smf)

z.B. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow f'(x) = 2x \quad x \in]-\infty; 0[\Rightarrow$ smf $\quad x \in [0; +\infty[\Rightarrow$ sms

> Liegt der Graph von $f'(x)$ über oder unter der x-Achse $\Rightarrow$ so ist der Graph von $f(x)$ sms oder smf.
> $\Rightarrow$ **Wichtig:** Nullstellen der ersten Ableitung, links und rechts davon untersuchen!
> Zum Beweis der Monotonie reicht auch eine Vorzeichentabelle (siehe 4.7)!

Extrema

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	Hochpunkt , $H(x_0 \vert f(x_0)$
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	Tiefpunkt , $T(x_0 \vert f(x_0)$

Auch über die Vorzeichentabelle beweisbar

„$+$“ $\to$ „x_0“ $\to$ „$-$“ $\quad\Rightarrow\quad$ Hochpunkt
„$-$“ $\to$ „x_0“ $\to$ „$+$“ $\quad\Rightarrow\quad$ Tiefpunkt

4.5. Krümmung und Wendepunkt

Krümmung

Ist $f''(x) > 0$ in einem Intervall	$\Rightarrow$	Graph von $f(x)$, ist in diesem Intervall linksgekrümmt
Ist $f''(x) < 0$ in einem Intervall	$\Rightarrow$	Graph von $f(x)$, ist in diesem Intervall rechtsgekrümmt

Wendepunkt

Ist $f''(x_0) = 0$ und einfache Nullstelle	$\Rightarrow$	Wendepunkt , $W(x_0 \vert f(x_0))$
Ist $f''(x_0) = 0$ und einfache Nullstelle und $f'(x_0) = 0$	$\Rightarrow$	Terrassenpunkt, ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente

4.6. Stammfunktion und Integral

Um die Fläche zu ermitteln, die eine Funktion mit der x-Achse einschließt, muss eine Stammfunktion gefunden werden. Diese drückt, wie die Ableitung die Steigung, die Fläche aus.

Integriert man von der Untergrenze zur Obergrenze, so erhält man die **Flächenbilanz**, d.h. die Flächen unterhalb der x-Achse werden von denen, die oberhalb liegen, abgezogen. Möchte man allerdings die gesamte Fläche ausrechnen, so müssen alle Flächenstücke einzelnd ausgerechnet und nur die Beträge addiert werden.

Wichtig: Soll man beweisen, dass eine Stammfunktion $F(x)$ zur einer bestimmen Funktion $f(x)$ gehört, so ist es einfacher, die Stammfunktion abzuleiten als die Funktion zu integrieren!

4.6.1. Integrationsregeln

Integralfunktion

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wichtig: Obergrenze (b) minus Untergrenze (a)! Fällt die Untergrenze mit der Obergrenze zusammen ist die Fläche 0, d.h. $I(x) = 0$ bei $x = a$. Nicht von den Variablen verwirren lassen, es bleibt alles beim Gleichen.

Stammfunktion

$$\boxed{\int a \cdot x^b dx = \tfrac{a}{b+1} \cdot x^{b+1} + C \ (b \neq -1)}$$

Da Konstanten beim Ableiten wegfallen muss beim Integrieren eine Konstante „C“ wieder hinzugefügt werden. Beim Rechnen kann man diese allerdings außer Acht lassen. Das „C“ gibt nur alle möglichen Stammfunktionen zu einer Funktion an.

4.6.2. Wichtige unbestimmte Integrale

$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

$\int \sin x dx$	$=$	$-\cos x$	$\int \cos x dx$	$=$	$\sin x$
$\int e^x dx$	$=$	e^x	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$	$=$	$e^{f(x)}$
$\int \ln x dx$	$=$	$-x + x \cdot \ln x$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$=$	$ln\|f(x)\|$

Das „$+C$“ wurde jeweils weggelassen! Andere Integrale sind fast unmöglich auszurechnen, d.h. die Funktionen für die eine Stammfunktion gesucht werden soll, müssen in diese Schemata passen.

4.6.3. Integral zwischen zwei Funktionen

Wird die Fläche gesucht, die zwischen zwei Graphen bzw. Funktionen eingeschlossen ist, so wird das Integral der einen Funktion vom Integral der anderen Funktion subtrahiert.

Als erstes ist es wichtig, die Schnittpunkte zwischen den Graphen zu bestimmen indem beide Funktionen gleichgesetzt werden.

$$f(x) = g(x)$$

Diese Schnittpunkte sind wichitg, da sie die einzelnen Teilflächen begrenzen und somit jeweils die Unter- und Obergrenzen bilden. Denn um die eingeschlossene Fläche zu erhalten müssen alle Teilfächen addiert werden.

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A_2 = \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_n| + \ldots$$

Man kann diese Rechnung auch zusammenfassen.

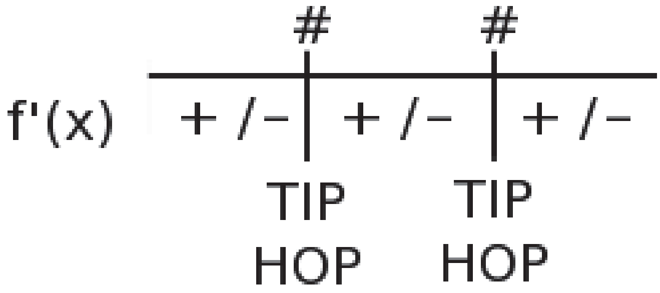
$$A = |\int_a^b [f(x) - g(x)]dx| + |\int_b^c [f(x) - g(x)]dx|$$

Wichtig: Es ist nicht unbedingt notwendig zu wissen, welche Funktion oberhalb oder unterhalb der anderen Funktion liegt. Mit den Beträgen der jeweiligen Flächen bzw. Teilrechnungen, kann dieses Problem elegant umgangen werden.

4.7. Vorzeichentabelle

Diese Version der Vorzeichentabelle sollte man nur nutzen, wenn man die anderen zu umständlich, zu unübersichtlich findet oder sie einfach nicht versteht.

Die VZT ist so viel kürzer und lesbarer, auch braucht man viel viel weniger Zeit dafür.



Als erstes zeichnet man genügend senkrechte Striche, für jede Nullstelle und eventuelle Extremstellen (Nennernullstellen). Darüber, also an der Position vom #, schreibt man dann genau diese Zahlenwerte in der richtigen Reihenfolge (Zahlenstrahl) hin.

Links an den Zeilenrand schreibt man die Funktion (normalerweise $f'(x)$ oder $f''(x)$), von der man die VZT machen will. In den Feldern zwischen den senkrechten Strichen, also den Nullstellen, schreibt man jetzt einfach das Vorzeichen hinein, dass in dem Bereich zwischen den Nullstellen ausgerechnet wurde. Dafür setzt man einfach einen Wert der in dem Bereich zwischen den Nullstellen bzw. Extremstellen liegt ein, entscheidend ist nur das Vorzeichen des Ergebnisses.

Zuletzt schreibt man unter den senkrechten Strichen ob es sich an der Stelle um einen Tiefpunkt (TIP) oder Hochpunkt (HOP) handelt. Alternativ kann hier auch links- bzw. rechtsgekrümmt stehen, je nachdem was man mit der VZT beweisen will.

Beispiel: