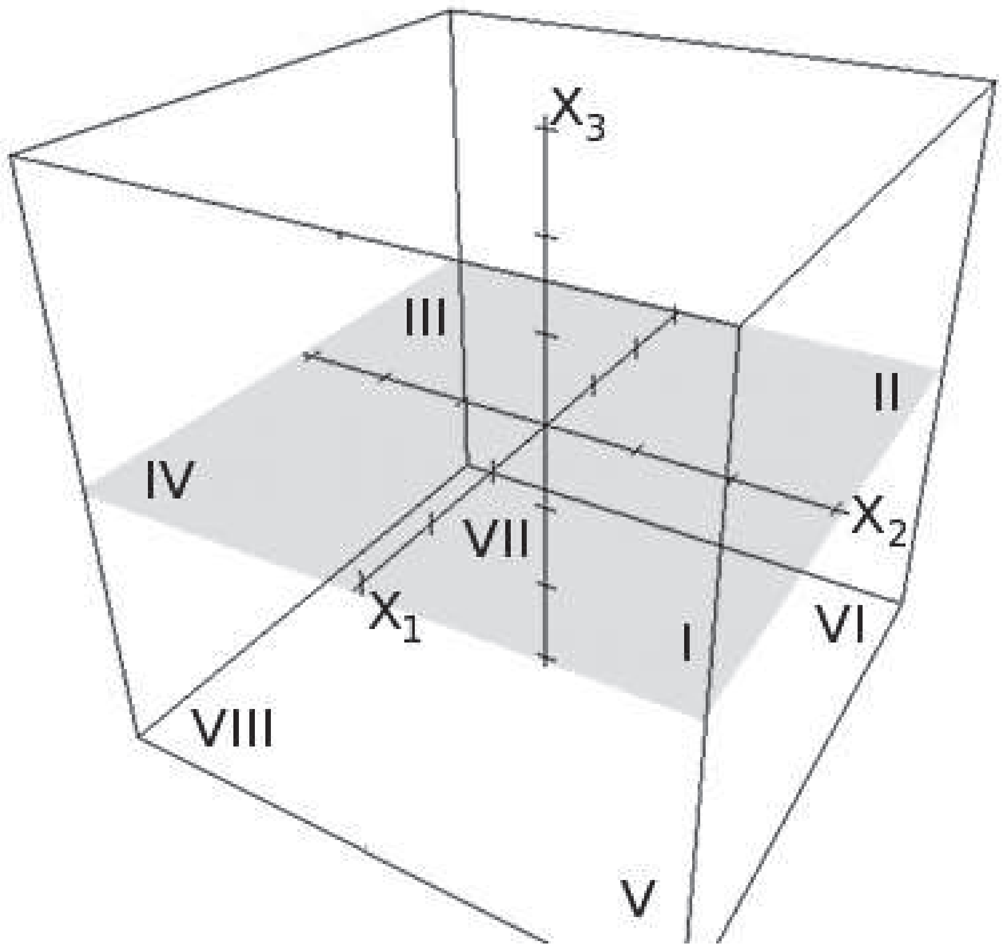
Teil II.

Geometrie

5. Dreidimensionales Koordinatensystem



Im dreidimensionalen Koordinatensystem gibt es acht Oktanten, „oben“ I bis VI und „unten“ VI bis VIII. Die Koordinatenachsen x_1, x_2 und x_3 stehen jeweils senkrecht aufeinander, wobei immer zuerst die Koordinate auf der x_1-Achse genannt, dann die der x_2-Achse und zuletzt die der x_3-Achse.

Punkte und Vektoren werden mit drei Koordinaten angegeben $P(x_1|x_2|x_3)$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Besondere Punkte und Vektoren

$O(0\|0\|0)$	Ursprung, auch Nullpunkt, (Nullpunktsvektor)
$\overrightarrow{OP}$	Ortsvektor zum Punkt P

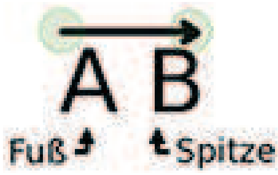
$P_{x_1}(p_1\|0\|0)$	Punkt auf der x_1-Achse	$P_{x_1x_2}(p_1\|p_2\|0)$	Punkt auf der x_1x_2-Ebene
$P_{x_2}(0\|p_2\|0)$	Punkt auf der x_2-Achse	$P_{x_2x_3}(0\|p_2\|p_3)$	Punkt auf der x_2x_3-Ebene
$P_{x_3}(0\|0\|p_3)$	Punkt auf der x_3-Achse	$P_{x_1x_3}(p_1\|0\|p_3)$	Punkt auf der x_1x_3-Ebene

6. Vektoren

Aus den Punkten A und B.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Merke: Spitze minus Fuß



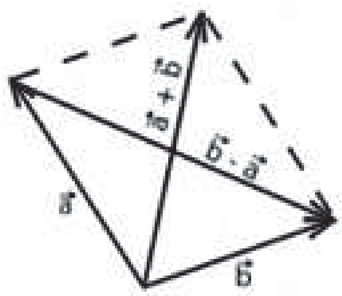
„Parallelogramm“

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix}$$

Fußpunkt „+“ Spitze

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

Spitze „-“ Fußpunkt



Der Vektor der genau in die entgegengesetze Richtung zeigt, wird Gegenvektor genannt.

$$\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA}$$

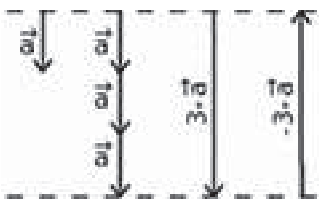
6.1. Betrag

Der Betrag eines Vektors gibt die Vektolänge an, berechenbar ist diese mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, wenn man davon ausgeht, dass die Hypotenuse die Länge darstellt.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ oder $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$ Skalarprodukt (siehe 6.4)

6.2. S-Multiplikation

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



6.3. Einheitsvektor

Der Einheitsvektor ist ein Vektor, dessen Länge genau „1“ beträgt. Um den Einheitsvektor eines Vektors zu erhalten, muss dieser mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert werden.

$$\vec{a_0} = \tfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \qquad \Rightarrow \quad |\vec{a_0}| = 1$$

6.4. Skalarprodukt + Winkel

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Ergibt das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ null, dann stehen die beiden Vektoren orthogonal (senkrecht) aufeinander.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \qquad (\varphi = 90°)$$

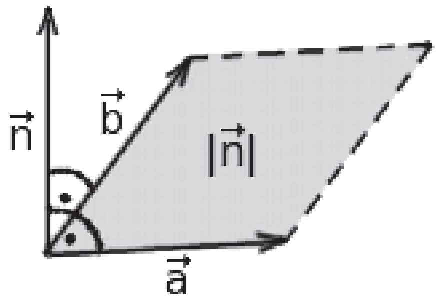
Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu bestimmen kann dieser Ansatz genutzt werden.

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)}$$

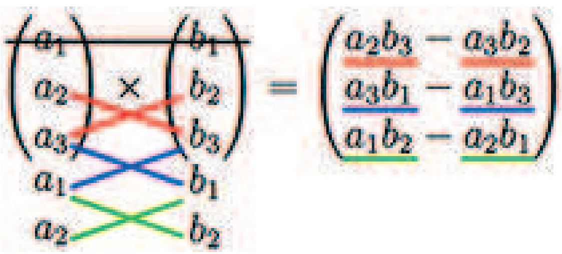
6.5. Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt einen Normenlvektor „$\vec{n}$“, der orthogonal (senkrecht) auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Der Betrag $|\vec{n}|$ gibt die Fläche des Parallelogrammes an, dass von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

$$\boxed{\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$



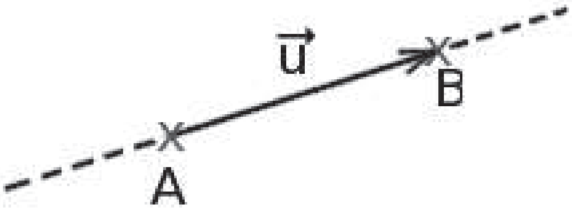
Merkhilfe:



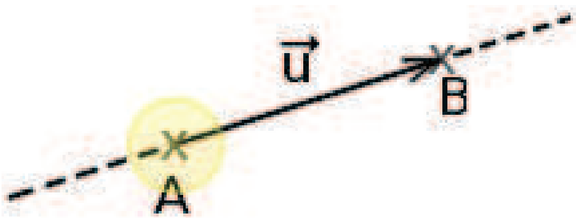
7. Gerade

$$g : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$$

bzw. $g : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$



7.1. Aufpunkt

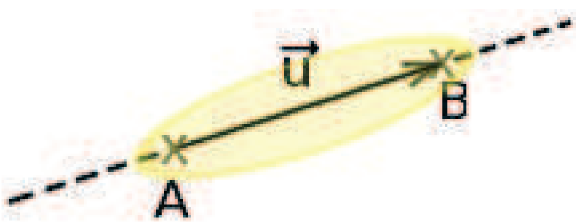


Der Aufpunktsvektor oder nur Aufpunkt ist der „Startpunkt“ an diesem die Gerade sich dann in die vom Richtungsvektor beschriebene Richtung erstreckt. Ohne den Aufpunkt, d.h. mit Aufpunkt 0, würde sich jede Gerade nur vom Ursprung aus in ihre jeweilige Richtung erstrecken. Der Aufpunkt ist also für die räumliche Position der Gerade im Koordinatensystem verantwortlich.

Das folgende Beispiel dient nur der besseren Verständis!!!

Betrachtet man die Gerade im zweidimensionalen Koordinatensystem, wäre der Aufpunkt so etwas wie das „t“ der Geradengleichung. Klar wird dieser „Vergleich“, wenn die Geradengleichung in die Form $y = mx + t$ umgestellt wird, also $g : \vec{x} = \vec{u}\lambda + \vec{A}$. So sieht man, dass das λ gleich dem x ist, der Vektor $\vec{u}$ der Steigung m gleicht und der Aufpunkt $\vec{A}$ dem y-Achsenabschnitt gleich gestellt werden könnte.

7.2. Richtungsvektor



Der Richtungsvektor gibt die Richtung an, in die sich eine Gerade ersteckt, also quasi die Kompassnadel einer Geraden. Dabei ist es wichtig zu wissen, dass die Gerade nicht nur in die eine Richtung geht, sondern auch in die entgegengestze. Dies hat etwas mit dem variablen Faktor, meist λ, zu tun, der auch negative Werte annehmen kann $\rightarrow$ **Gegenvektor!**

7.3. Lineare Un- und Abhängigkeit

Es gelten zwei Vektoren als **lin. unabhängig**, wenn die beiden Vektoren **kein** Vielfaches von einander sind. Hingegen sind zwei Vektoren **lin. abhängig**, wenn sie **ein** Vielfaches von einander sind, das schließt den Gegenvektor mit ein.

$$\boxed{\vec{u} = k \cdot \vec{v}} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}$$

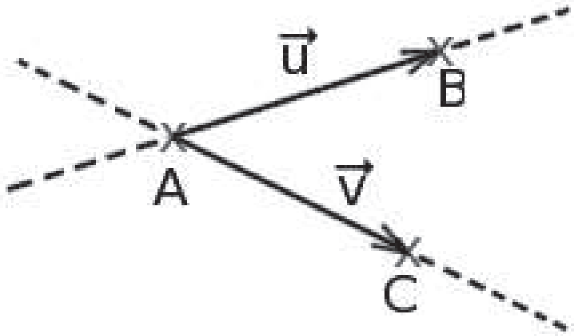
Wenn „k“ für alle Koordinaten eindeutig lösbar ist folgt daraus die **lin. Abhängigkeit**. Falls es unterschiedliche Lösungen gibt folgt daraus die **lin. Unabhängigkeit**.

8. Ebene

Eine Ebene wird aufgespannt von zwei Geraden, die den gleichen Aufpunkt besitzen. Wobei die zwei Richtungsvektoren, $\vec{u}$ und $\vec{v}$, linear unabhängig sein müssen (siehe 7.3). Daraus folgt die **Parameterform**:

$$\boxed{E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}$$

bzw. $E : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$



8.1. Normalenformen

Für die Ebene gibt es auch Normalenformen, die hauptsächlich das Rechnen mit Ebenen vereinfachen sollen und die „Lesbarkeit“ einer Ebene verbessern. Es kann auch manchmal sein, dass es sich anbietet gleich eine Ebene in einer der Normalenformen aufzustellen, ohne zuerst über die Parameterform zu gehen.

Für alle Normalformen wird der **Normalenvektor** benötigt (siehe 6.5)

($\vec{n} \perp \vec{u}$ und $\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.)

8.1.1. Vektordarstellung

$$\boxed{E : \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{E : \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = 0}$$

8.1.2. Koordinatendarstellung

$$\boxed{E : n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0 \qquad\qquad \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 \qquad\qquad \Rightarrow n_0 = -(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3)$$

8.2. Hesse'sche Normalenform + Abstände

In dem man die Ebene durch den Betrag des Normalenvektors teilst erhält man eine abgewandelte Normalenform in Koordinatendarstellung, die man auch "Einheitsebene" nennen könnte. In diesem Fall steht $\frac{n_0}{|\vec{n}|}$ für den Abstand der Ebene zum Ursprung, durch diesen Umstand ist es möglich ganz einfach, den Abstand zwischen einem Punkt und der Ebene auszurechnen.

$$\boxed{E: \quad \frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_0}{|\vec{n}|} = 0}$$

Abstand

Möchte man den Abstand d eines Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ zur Ebene E wissen, so setzt man einfach den Punkt P in die Hesse'sche Normalenform ein.

$$\frac{n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3+n_0}{|\vec{n}|} = d$$

9. Lagebeziehungen

9.1. Gerade und Gerade

Als erstes wird bestimmt, ob die Richtungsvektoren linear abhängig oder unabhängig sind. Die Geraden sind $g : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$.

linear abhängig	$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$
Identisch ($g \in h$) $\vec{B} \in g$ oder $\vec{A} \in h$	„Aufpunkt liegt jeweils auf der anderen Geraden“
Parallel ($g \parallel h$) $\vec{B} \notin g$ oder $\vec{A} \notin h$	„Aufpunkt liegt jeweils **nicht** auf der anderen Geraden“
linear unabhängig	$\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$
Schnittpunkt ($g \cap h$) $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$	„λ und μ lassen sich eindeutig bestimmen, damit lässt sich der Schnittpunkt ausrechnen (einsetzen)“
Windschief ($g \neq h$) $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$	„λ und μ lassen sich **nicht** bestimmen“

9.2. Gerade und Ebene

Die Geraden wird in die Ebenengleichung, entweder Vektor- oder Koordinatenform, eingesetzt und das „λ“ bestimmt. Gerade $g : \vec{x} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{u}$.

$$E : \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \circ (\vec{B} + \lambda \cdot \vec{u} - \vec{A}) = 0$$
$$E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1(b_1 + \lambda \cdot u_1) + n_2(b_2 + \lambda \cdot u_2) + n_3(b_3 + \lambda \cdot u_3) + n_0 = 0$$

Parallel ($g \parallel E$)	keine Lösung für λ bzw. fällt aus den Gleichungen raus. Bsp.: „$2 = 3$“
Schnittpunkt ($g \cap E$)	eine Lösung für λ, d.h. jede Gleichung liefert den gleichen Wert, Schnittpunkt ausrechenbar. Bsp.: „$\lambda = 2$“
Identisch ($g \in E$)	unendlich viele Lösungen für λ bzw. fällt im Lösungsterm weg. Bsp.: „$5 = 5$“

9.3. Ebene und Ebene

Genauso wie bei Gerade und Gerade wird zuerst bestimmt, ob die Richtungsvektoren (Normalenvektoren) linear abhängig bzw. unabhängig sind. Die Ebenen sind $E_1 : \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ und $E_2 : \vec{m} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$.

linear abhängig	$\vec{n} = k \cdot \vec{m}$
Identisch ($E_1 \in E_2$) $\vec{B} \in E_1$ oder $\vec{A} \in E_2$	„Aufpunkt liegt jeweils auf der anderen Ebene“
Parallel ($E_1 \parallel E_2$) $\vec{B} \notin E_1$ oder $\vec{A} \notin E_2$	„Aufpunkt liegt jeweils **nicht** auf der anderen Ebene“
linear unabhängig	$\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$
Schnittgerade ($E_1 \cap E_2$) $E_1 = E_2$	„Schnittgerade lässt sich mit dem Gleichungssystem ausrechnen. Nicht vergessen λ für ein bestimmtes $x_{...}$ einzusetzen.“ Gleichung I. in Gleichung II. usw. dann $x_{...}$ jeweils isolieren und bestimmen. Ein Beispielergebnis: wähle für $x_1 = \lambda$; $x_3 = 3 - 2\lambda$; $x_2 = -2 + \lambda$. Daraus ergibt sich die Geradengleichung: $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

9.4. Spezielle Lagen

Natürlich können Geraden und Ebenen auch parallel zu den Koordiantenachsen bzw. den Koordinatenebenen liegen. Beweisbar ist dies ganz einfach über die Richtungsvektoren bzw. den Normalenvektoren.

Richtungsvektoren der Koordinatenachsen

x_1-Achse $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_2-Achse $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_3-Achse $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektoren der Koordinatenebenen

x_1x_2-Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ x_2x_3-Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_1x_3-Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.4.1. Spurpunkt

Spurpunkte sind die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen. Es können aber auch die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit einer Ebene gemeint sein.

Um diese zu berechnen, setzt man einfach die Koordinaten für $\vec{x}$ gleich 0, die nicht betroffen sind bzw. nicht vorkommen. Z.B.: Möchte man den Spurpunkt einer Geraden in der x_1x_2-Ebene berechnen, so kann kein anderern Wert als $x_3 = 0$ vorkommen, sonst würde es sich nicht mehr um die x_1x_2-Ebene handeln.

Manchmal ist es einfacher den Spurpunkt einer Geraden über die Ebenengleichung der Koordinatenachsen zu berechnen, in dem man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzt, so entfällt das Gleichungssystem.

Spurpunkte - Gerade

x_1x_2-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_2x_3-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_1x_3-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Spurpunkte - Ebene

x_1-Achse $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_2-Achse $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_3-Achse $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Ebenengleichungen der Koordinatenebenen (Normalenvektoren, siehe 9.4)

x_1x_2-Ebene $\quad E : x_3 = 0$ $\qquad$ x_2x_3-Ebene $\quad E : x_1 = 0$ $\qquad$ x_1x_3-Ebene $\quad E : x_2 = 0$

9.4.2. Spurgerade

Spurgeraden sind die Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen.

Hier setzt man für die Berechnung, wie bei den Spurpunkten, für $\vec{x}$ die jeweiligen Koordinaten der Koordinatenebenen ein. Weiter werden die Spurgeraden genauso ausgerechnet wie eine Schnittgerade, (siehe 9.3).

Spurgeraden

x_1x_2-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_2x_3-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ x_1x_3-Ebene $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$